Modèle optique de la vision

d'après le Concours Général de 2024 en physique-chimie

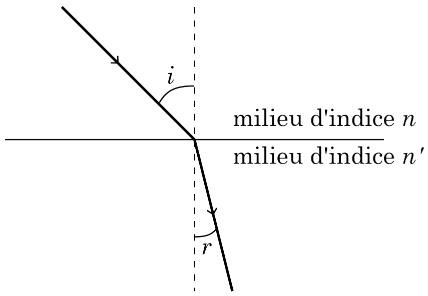
Données et rappels utiles

- **Loi de conjugaison** de Descartes pour une lentille mince de focale f', de centre O, conjuguant le point image A' et le point objet A :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

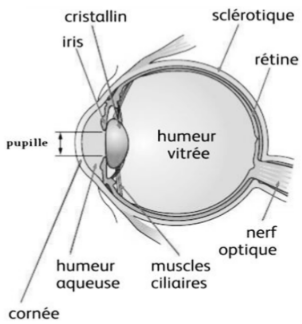
- **Loi de Snell-Descartes** sur la réfraction d'un rayon de lumière passant d'un milieu d'indice optique n à un autre d'indice optique n' :

$$n\sin(i) = n'\sin(r)$$



- Approximation des petits angles : $\theta \approx \sin(\theta) \approx \tan(\theta)$

DOCUMENT 1 : l'œil



Du point de vue de la formation des images, les parties importantes de l'œil sont les suivantes :

- **la pupille** joue le rôle de diaphragme : elle limite la quantité de lumière arrivant dans l'œil ;
- **le cristallin** permet la mise au point ;
- **la rétine**, constituée des cônes et des bâtonnets, est un capteur de lumière. Elle est assimilée à un écran.

Quelle que soit la position de l'objet à observer par rapport à l'observateur, l'image de cet objet, pour être nette, doit se former sur la rétine. La distance cristallin-rétine étant constante et de l'ordre de 1,5 cm, en fonction de la position de l'objet à observer, le cristallin modifie ses caractéristiques afin que l'image se forme sur la rétine.

- Lorsqu'un objet est observé au loin, le cristallin est relâché et sa distance focale est grande (la vergence est petite, le cristallin est peu convergent). On dit que l'œil est au repos ou qu'il n'accommode pas. Le point le plus éloigné visible est le punctum remotum : pour un œil normal, il est à l'infini.
- Lorsqu'un objet est observé de près, le cristallin est bombé et sa distance focale est diminuée (la vergence augmente, le cristallin est plus convergent). On dit que l'œil accommode. Le point le plus proche visible est le punctum proximum : pour un œil normal, il est situé à 25 cm environ.

1 Œil sain

Dans une modélisation préliminaire, on considère le schéma optique équivalent suivant :

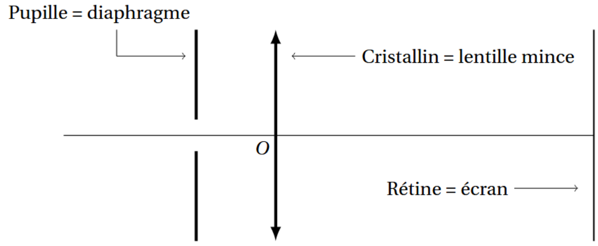


Fig. 1 : *modèle optique simplifié de l'œil*

1. En exploitant les informations contenues dans le document 1 et la figure ci-dessus, déterminer la valeur de la distance focale du cristallin lorsque l'œil regarde à l'infini. On la notera f_{PR} par la suite.
2. Faire de même pour déterminer f_{PP} la distance focale du cristallin quand l'œil regarde l'objet le plus proche qu'il peut voir net.

Pour comprendre comment le cristallin modifie la distance focale de la lentille équivalente, on considère que l'œil est une sphère de rayon a et d'indice n. Un rayon lumineux incident arrive sur l'œil, parallèlement à l'axe optique, avec une hauteur h petite devant a (voir figure 2 ci-après). Il est alors réfracté et atteint la rétine en son centre. Dans toute cette partie on se place dans l'approximation des petits angles, ce qui revient à supposer $h << a$.

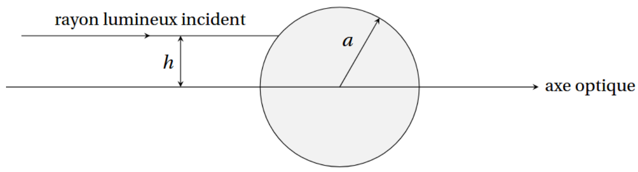


Fig. 2 : *modèle sphérique de l'œil*

3. Reproduire le schéma ci-dessus et poursuivre la marche du rayon lumineux incident. Indiquer les angles d'incidence i et de réfraction r . On suppose que l'œil est au repos.
4. Évaluer l'indice optique équivalent de la sphère pour que l'image d'un objet à l'infini se forme sur la rétine.
5. Lorsqu'il se contracte, le cristallin modifie la courbure de la sphère localement (cela revient à modifier le rayon apparent de l'œil au niveau de l'entrée des rayons). Avec un schéma clair et en s'aidant des questions précédentes, déterminer si, pour voir de plus près, le cristallin diminue ou augmente le rayon apparent de l'œil.

2 Correction de l'œil myope

On reprend pour l'œil le modèle optique simplifié de la figure 1.

6. Montrer que deux lentilles minces accolées de distances focales respectives f_1 et f_2 sont équivalentes à une lentille mince de focale f_{eq} telle que :

$$\frac{1}{f_{\text{eq}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

7. On considère un œil myope : il voit au plus loin à 40 cm. Déterminer la valeur de la distance focale de la lentille de contact qui permettra de corriger sa vue.

Éléments de correction

1 Œil sain

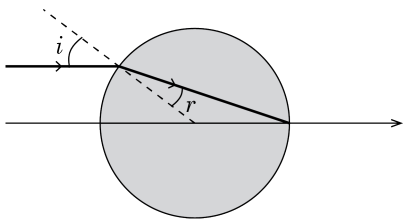
1. Dans le cas où l'objet est à l'infini, la distance lentille - image est la distance focale recherchée. On a donc :

$$f'_{\mathrm{PR}} = 1,5\ cm$$

2. Dans le cas où l'œil observe l'objet le plus proche possible on a : $\overline{OA} = -25$ cm. Donc, par la loi de conjugaison :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_{\mathrm{PP}}} &= \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \\ f'_{\mathrm{PP}} &= \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} \\ &= \frac{-25 \times 1,5}{-25 - 1,5} \approx \mathbf{1,4\ cm} \end{aligned}$$

3. La figure attendue est :



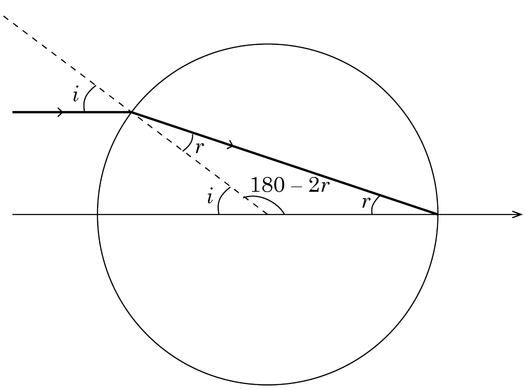
4. L'indice de réfraction de l'air vaut 1. La relation de Snell-Descartes donne donc dans cette situation :

$$\sin(i) = n \sin(r)$$

Or on suppose valide l'approximation des petits angles, donc :

$$\begin{aligned} i &= nr \\ n &= \frac{i}{r} \end{aligned}$$

Un peu de géométrie :



Cette figure montre que :

$$i = 180 - (180 - 2r) = 2r$$

L'indice de réfraction recherché vaut donc :

$$n = \frac{i}{r} = 2$$

5. Pour observer un objet plus proche de lui, le cristallin doit diminuer sa distance focale, comme vu à la question 2. Pour ce faire son rayon de courbure doit lui aussi diminuer.

2 Correction de l'œil myope

6. Pour répondre à cette question il faut décomposer en deux étapes la formation de l'image :
- la première lentille donne de l'objet A une image intermédiaire A_i ;
- A_i constitue un objet pour la deuxième lentille ;
- la seconde lentille donne de l'objet A_i l'image A'.

Appliquons la relation de conjugaison à la première lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA_i}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1}$$

Donc :

$$\frac{1}{\overline{OA_i}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{OA}}$$

Appliquons la relation de conjugaison à la seconde lentille :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_i}} &= \frac{1}{f_2} \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{OA}}\right) &= \frac{1}{f_2} \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \underbrace{\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}}_{1/f'_{\mathrm{eq}}} \end{aligned}$$

7. La distance focale de l'œil myope lorsqu'il vise un objet à $\overline{OA} = -40$ cm vaut :

$$f'_{\mathrm{myope}} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$$

Or la distance f'_{cor} permettant de corriger cet œil est telle que :

$$\frac{1}{f'_{\mathrm{myope}}} + \frac{1}{f'_{\mathrm{cor}}} = \frac{1}{f'_{\mathrm{PR}}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'_{\mathrm{cor}} &= \frac{f'_{\mathrm{myope}} \times f'_{\mathrm{PR}}}{f'_{\mathrm{myope}} - f'_{\mathrm{PR}}} \\ &= \frac{f'_{\mathrm{myope}}}{\dfrac{f'_{\mathrm{myope}}}{f'_{\mathrm{PR}}} - 1} \\ &= \frac{\dfrac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}}{\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} - 1} \\ &= \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA} + \overline{OA'}} \\ &= \overline{OA} = \mathbf{-40\ cm} \end{aligned}$$

Autre méthode possible (plus simple mais moins élégante)
On pouvait :
- calculer f'_{myope} à l'aide de la loi de conjugaison ;
- sachant que f'_{PR} doit valoir 1,5 cm, calculer f'_{cor} à l'aide de la relation démontrée à la question 6.

On trouve le même résultat (aux erreurs d'arrondi près).