Mesure avec une règle

par **Mathieu ROUAUD**
Lycée Alain-Fournier - 18000 Bourges
ecrire@incertitudes.fr

RÉSUMÉ

La mesure d'une grandeur par un système d'acquisition induit de part sa résolution une erreur de discrétisation. Nous nous attachons ici à la mesure d'une longueur avec une règle graduée. Ce type de mesure nous amène à considérer une loi de probabilité continue uniforme. Nous utilisons ensuite un produit de convolution pour déterminer l'incertitude avec sa confiance sur une somme de longueurs. Nous généralisons finalement au cas général du calcul d'incertitudes pour des variables aléatoires indépendantes en utilisant la formule de propagation des erreurs.

INTRODUCTION

Nous voulons mesurer des longueurs et évaluer les incertitudes le plus précisément possible. Incertitudes sur les valeurs mesurées et leurs sommes. Nous disposons d'une règle de 15 cm graduée au millimètre et de deux jeux de cartes. La règle est supposée parfaite et les cartes de chaque jeu identiques entre elles.

Figure 1

1. MESURE DE LA LONGUEUR D'UNE CARTE

Nous plaçons la graduation du zéro sur le bord gauche de la carte. Sur le bord droit nous considérons la graduation la plus proche du bord. L'expérimentateur ne lit pas entre les graduations. L'épaisseur des traits qui délimitent une graduation est considérée comme négligeable devant la largeur de cette graduation. Nous obtenons ainsi :

- pour le jeu 1 : $x_1 = 8{,}4 \pm 0{,}05$ cm ;
- pour le jeu 2 : $x_2 = 11{,}2 \pm 0{,}05$ cm .

Nous acceptons une perte d'information due à la résolution $\delta = 1$ mm de la règle. Lorsque ultérieurement nous exploitons ces données, toutes les valeurs entre $x_{\min} = x_{moy} - \delta/2$ et $x_{\max} = x_{moy} + \delta/2$ sont équiprobables. La loi de probabilité de la variable continue aléatoire X est uniforme. x est une réalisation de X. Cette distribution de probabilité a une étendue $E = x_{\max} - x_{\min}$ et nous vérifions pour la densité de probabilité $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

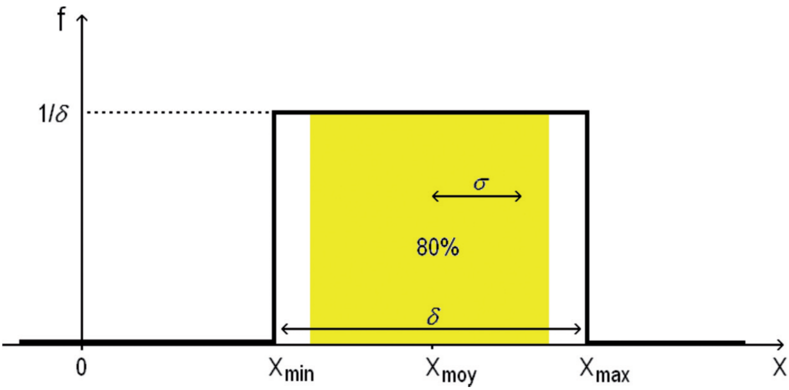


Figure 2

La probabilité pour que la valeur de X soit comprise entre x et $x + dx$ est de $f(x)\,dx$. Le résultat sera compris avec certitude entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$: par exemple $x_1 = 8{,}4 \pm 0{,}05$ cm à 100 % de confiance, mais $x_1 = 8{,}4 \pm 0{,}04$ cm avec une probabilité de 80 %.

Pour caractériser l'étalement d'une distribution considérons l'étendue E et l'écart-type σ dont la définition pour une loi continue est :

$$V = \sigma^2 = \int \left(x - x_{moy}\right)^2 f(x)\,dx\ ,$$

V est appelée la variance. Pour une loi uniforme :

$$\sigma = \delta / \sqrt{12} \approx 0{,}29\,\delta\ ,$$

et nous avons $x = x_{moy} \pm \sigma$ avec une confiance de 58 %. L'écart-type est une grandeur adéquate pour caractériser la largeur d'une distribution. L'étendue quant à elle est définie par les valeurs extrêmes qui peuvent être peu représentatives ou pire des valeurs aberrantes.

2. LONGUEUR DES DEUX CARTES MISES BOUT À BOUT

Nous souhaitons déterminer l'incertitude sur x avec $x = x_1 + x_2$. Si nous traçons x_2 en fonction de x_1 l'ensemble des points possibles forme un domaine carré. L'ensemble des points tel que x soit constant est une portion de droite de pente – 1 et d'ordonnée à l'origine x : $x_2 = -\,x_1 + x$. Il n'y a qu'un cas qui réalise $x = x_{\min}$ soit $\{x_1 = x_{1\,\min}\,;\, x_2 = x_{2\,\min}\}$ au point A sur la figure. Par contre sur l'ensemble du segment [CD] $x = x_{moy}$. Nous comprenons que toutes les valeurs de x ne sont pas équiprobables.

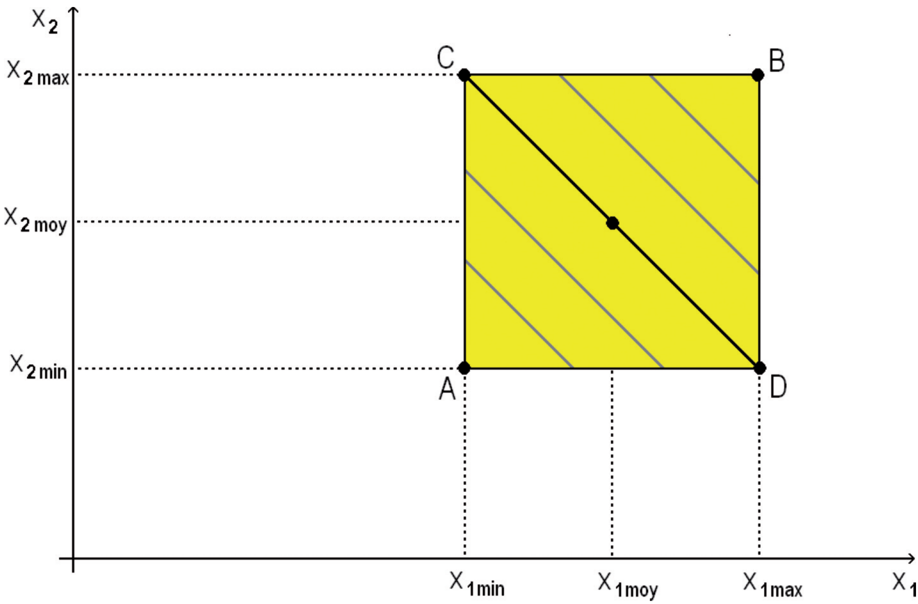


Figure 3

La loi de probabilité f de X se calcule à partir de celle f_1 de X_1 et f_2 de X_2. Pour une somme de variables aléatoires indépendantes, le résultat est donné par un produit de convolution [1] :

$$f(x) = \int f_1(y) f_2(x-y)\,dy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < x_{\min} \Rightarrow f(x) = 0 \\ x_{\min} < x < x_{moy} \Rightarrow f(x) = \left(x - x_{\min}\right) / \delta^2 \\ x_{moy} < x < x_{\max} \Rightarrow f(x) = \left(x_{\max} - x\right) / \delta^2 \\ x > x_{\max} \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases}$$

Nous avons alors une loi de probabilité triangulaire. Nous obtenons $x = 19{,}6 \pm 0{,}1$ cm avec 100 % de confiance, et $x = 19{,}6 \pm 0{,}055$ cm avec 80 % de confiance.

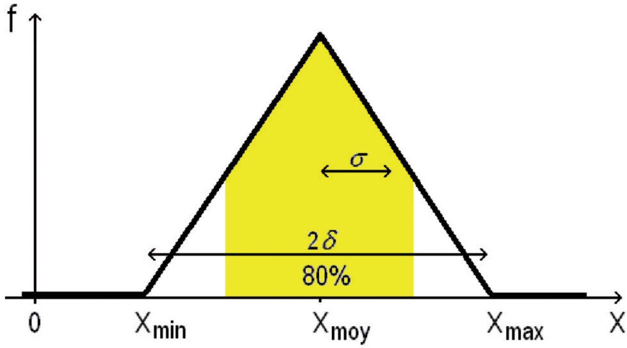


Figure 4

3. ANALOGIE AVEC LE LANCER DE DEUX DÉS


Figure 5

Pour chaque dé les six valeurs sont équiprobables. Ici la loi de probabilité n'est plus continue, mais discrète. Pour le lancer simultané de deux dés, la somme des valeurs obtenues est comprise entre deux et 12. Dans ce cas, il n'y a plus équiprobabilité, une manière de faire deux avec un double un, deux manières de faire trois avec un et deux ou deux et un... Pour faire sept nous obtenons le maximum de possibilités. Nous retrouvons ainsi une loi triangulaire (*cf*. figure 6, page ci-contre).

4. LONGUEUR DE DEUX CARTES D'UN MÊME JEU MISES BOUT À BOUT

Les cartes d'un jeu étant supposées identiques si la longueur de l'une d'elle est surestimée, il en sera de même pour la deuxième. Dans ce cas, les erreurs s'ajoutent et ne peuvent pas se compenser. Pour deux cartes différentes, la première mesure pouvait être sous-estimée et la deuxième surestimée, une compensation pouvant alors se produire. Ici

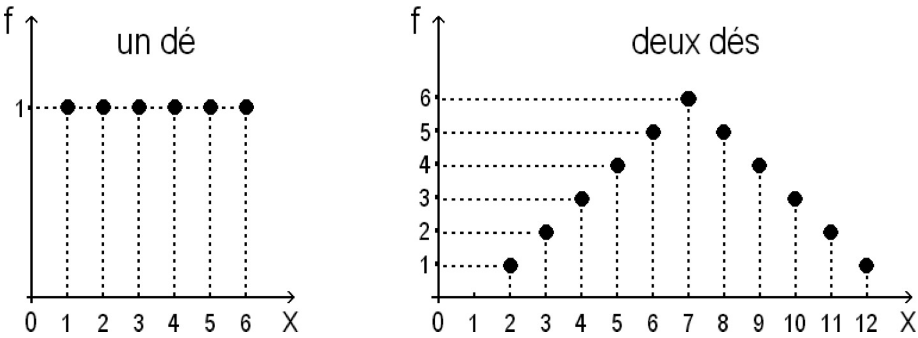


Figure 6

ce n'est plus le cas et pour $X = X_i + X_i'$ nous obtenons une loi de probabilité à nouveau uniforme de largeur 2δ. Nos variables aléatoires ne sont plus indépendantes. Pour le jeu 1 :

$$x_1 = 8{,}4 \pm 0{,}04 \text{ cm} \quad \Longrightarrow \quad x = 2x_1 = 16{,}8 \pm 0{,}08 \text{ cm}$$

à 80 % de confiance.

5. SOMME DE N LONGUEURS INDÉPENDANTES

Nous avons $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Chaque longueur X_i suit une loi uniforme de largeur δ. Pour la somme de neuf variables aléatoires indépendantes après itération du calcul nous obtenons la courbe suivante (*cf*. figure 7).

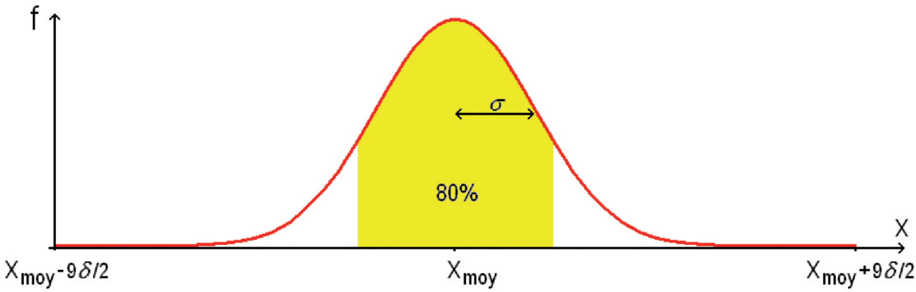


Figure 7

Nous avons dans ce cas $x = x_{moy} \pm 0{,}11 \text{ cm}$ à 80 %. À 100 % de confiance $x = x_{moy} \pm 0{,}45 \text{ cm}$ ce qui amène à considérer des domaines où la probabilité de présence de X est vraiment négligeable. Une incertitude de 0,45 cm semble inutile alors que 99 % des cas étaient déjà présents avec une incertitude de 0,22 cm. Raisonner avec une confiance

	80 %	95 %	99 %
N = 1	0,40 δ	0,48 δ	0,50 δ
N = 2	0,55 δ	0,78 δ	0,90 δ
N = 3	0,66 δ	0,97 δ	1,19 δ
N = 4	0,75 δ	1,12 δ	1,41 δ
N = 5	0,84 δ	1,25 δ	1,60 δ
N = 6	0,92 δ	1,38 δ	1,76 δ
N = 7	0,99 δ	1,49 δ	1,91 δ
N = 8	1,06 δ	1,59 δ	2,05 δ
N = 9	1,12 δ	1,69 δ	2,18 δ
N = 10	*1,2* δ	*1,8* δ	*2,3* δ
N = 20	*1,7* δ	*2,5* δ	*3,3* δ
N = 50	*2,6* δ	*4,0* δ	*5,2* δ
N = 100	*3,7* δ	*5,7* δ	*7,4* δ

Tableau 1

de 100 % revient à considérer l'étendue, celle-ci est additive pour une somme de variables. L'étendue est proportionnelle à N. Mais cette approche ne tient pas compte d'une chose : la courbe se resserre autour de la moyenne quand N augmente.

Il existe une autre grandeur additive : la variance. L'écart-type racine de la variance est proportionnel à $\sqrt{N}$ et tient compte des compensations d'erreurs.

La courbe obtenue est ce qu'on appelle une courbe en cloche. Un théorème statistique, appelé théorème central limite, indique que pour N grand la courbe tend vers une gaussienne. L'étendue d'une gaussienne est infinie pour un écart-type fini.

Nous pouvons résumer l'évolution de l'incertitude sur la somme de N longueurs indépendantes mesurées avec une même résolution δ dans le tableau 1 ci-contre. En italique, à partir de N = 10, il s'agit de simulations numériques réalisées sur ordinateur par génération de nombres aléatoires.

Les résultats des mesures sont souvent donnés avec une confiance de 95 %, ce qui correspond pour une gaussienne à une incertitude d'environ 2σ.

6. AUTRES APPLICATIONS

Un coureur souhaite mesurer son temps de parcours. Sa montre à affichage numérique indique qu'il part à 10 h 52 min et qu'il arrive à 11 h 11 min. L'affichage est à la minute, il est donc parti entre 10 h 52 min 00 s et 10 h 52 min 59 s. D'où la date de départ dans l'intervalle $t_1 = 10\text{ h } 52\text{ min } 30\text{ s} \pm 30\text{ s}$. La résolution est d'une minute. La durée du parcours est $\Delta t = t_2 - t_1$. Les résultats restent vrais pour une différence. Nous avons $N = 2$ et $\Delta t = 19\text{ min} \pm 47\text{ s}$ avec 95 % de confiance. Même démarche si des étudiants mesurent une différence d'angles sur un goniomètre. Chaque mesure étant à la minute d'arc près l'incertitude du résultat est de 47 secondes d'arc à 95 %.

Sept personnes veulent rentrer en même temps dans un ascenseur. Sa charge maximale est de 500 kg. Leurs masses individuelles sont mesurées avec un pèse-personne d'une résolution d'un kilogramme. La masse totale est de 499 kg. Quelle est la probabilité d'être en surcharge ? Pour N = 7, l'incertitude atteint un kilogramme avec une confiance de 80 %. Il y a donc une chance sur dix pour que l'ascenseur soit en surcharge.

Au laboratoire de nombreux appareils de mesure disposent d'affichages numériques. La résolution est au dernier digit près. Mais l'incertitude globale est bien supérieure. Il faut consulter la notice de chaque appareil.

CONCLUSION

La démarche générale consiste à combiner des lois de probabilités. L'outil mathématique utilisé est un changement de variables, puis une ou plusieurs intégrations. Pour la mesure avec une règle décrite dans cet article, il s'agissait d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes et nous avons obtenu un produit de convolution.

Si l'on veut faire un calcul plus rapide, une analyse de variance peut suffire. Nous avons une variable aléatoire X qui dépend de N variables aléatoires indépendantes X_i : $X = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_N\right)$. Nous appelons σ_i l'écart-type de X_i et σ celui de X. Pour des σ_i finis et de petites variations, nous avons la formule de propagation des écarts-types [2] :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 \,.$$

Et, indépendamment des lois de probabilités, cette relation entre les variances reste vraie. On pourra ainsi donner son résultat avec une incertitude à 2σ ou 3σ.

Existe-t-il une formule analogue en terme de confiance ? Oui, mais elle est approximative, c'est la formule de propagation des incertitudes :

$$\Delta f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2 \,,$$

avec $x_i = x_{moy} \pm \Delta x_i$, $x = x_{moy} \pm \Delta x$ et une confiance constante. Cette formule est très pratique et permet un calcul rapide et raisonnable des incertitudes combinées [3]. Qui plus est, elle est exacte si la forme des distributions est la même pour X et les X_i. Par exemple, si les X_i sont à distribution gaussienne toute combinaison linéaire l'est aussi. Nous tenons ainsi compte des compensations et nous évitons d'utiliser la formule $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\partial f / \partial x_i\right| \Delta x_i$ qui surestime les incertitudes, parfois même avec un tel excès que l'on en perd son sens physique. Cette dernière formule ne tient compte d'aucunes compensations, on a la pire des situations, statistiquement improbable. Ici, par exemple pour N = 100, on aurait une incertitude de 50 δ, au lieu de 5,7 δ dans la pratique (confiance de 95 %).

Dans cet article, nous nous sommes concentrés sur la résolution d'un système d'acquisition qui donne une erreur de discrétisation. Mais on peut aussi être amené à considérer des erreurs systématiques et des erreurs aléatoires. Ici la règle était supposée parfaite, c'est-à-dire juste et fidèle [4].

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] SAPORTA G. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip, 2006.

[2] PROTASSOV K. *Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales*. Presses Universitaires de Grenoble, 1999.

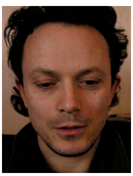
[3] ROUAUD M. « Calculs d'incertitudes ».
`http://www.incertitudes.fr/Incertitudes.html`

[4] BREUIL P., DI BENEDETTO D. « Incertitude et étalonnage ». 2000.
`http://lmis3.epfl.ch/students/Incertitudes.pdf`

Note de la rédaction

On peut aussi consulter des références dans *Le Bup* :

- MOREAU R. « Exploitation d'une série de mesures ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 1977, vol. 71, n° 596, p. 1249-1303.
- GIÉ H. et MOREAU R. « Le calcul des incertitudes ». *Bull. Un. Phys.*, février 1987, vol. 81, n° 691 (1), p. 159-208.
- BARCHIESI D. « Incertitudes de mesure : une approche normative ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, mai 2004, vol. 98 n° 864, p. 653-661.
- ALHALEL T. « Incertitudes et mesure des incertitudes ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2005, vol. 99, n° 879 (2), p. 7-35.
- BRETONNET J.-L. « Expression et évaluation des incertitudes de mesures ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2006, vol. 100, n° 889 (2), p. 219-236.



Mathieu ROUAUD
Professeur de sciences physiques en prépa
Diplômé en physique théorique
Lycée Alain-Fournier
Bourges (Cher)